Chapter 10
運動學：直線運動

10-1　前　言

10-2　位　移

10-3　速　度

10-4　加速度

10-5　等加速度直線運動

10-6　拋射運動

動力學包括運動學 (kinematics) 及動力學 (kinetics)。

此運動形式將為 下面三種之一。

1. 直線或平移運動 (rectilinear or translational motion)

：圖 10-1 活塞中的銷 C 部為直線運動。

2. 圓周運動 (circular motion)

：圖 10-1 臂 AB 之端點銷 B 為圓周運動。

3. 一般平面運動 (general plane motion)：圖 10-2

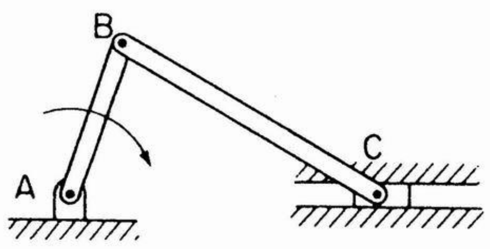


圖 10-1

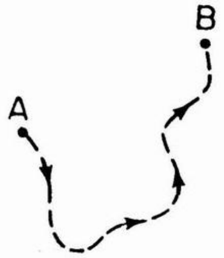


圖 10-2

10-2 位　移

距離（distance）與位移（displacement）是有所差別的。距離為純量，位移為向量。圖 10-3 中，由 A 移動到 B，三種路線任選其一皆可。

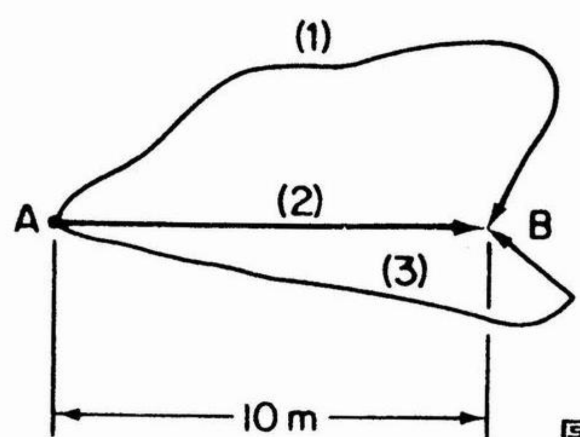


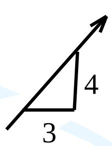
圖 10-3

例題 10-1

一車子往北開 8 km，往東 9 km，再往北開 4 km。試求車子所走位移及所經距離。

解：

所走距離為 $8+9+4=21\,\text{km}$ ，所經路徑繪於圖 10-4 中。由幾何相似三角形知，車子所走位移為 15 km。



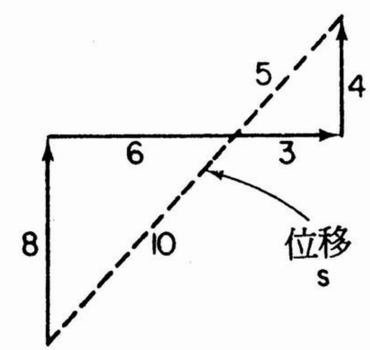


圖 10-4

10-3　速　度

速度同時包含速率及方向，速度為位移對時間的變化率，與速率具同樣單位，即 m/s、km/h、ft/sec 及 ft/min。以方程式示為

$$v = \frac{s}{t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (10\text{-}1)$$

式中

$v =$ 速度（平均）

$s =$ 位移

$t =$ 時間

$\Delta s = s_2 - s_1$

$\Delta t = t_2 - t_1$

例題 10-2

某一印刷機構，其中一個銷的運動路徑繪於圖10-5，當 $t=0$ 時由原點開始運動，$t=2$ 秒時到達點（1），$t=3$ 秒時到達點（2）。試求由點（1）到點（2）之平均速度。

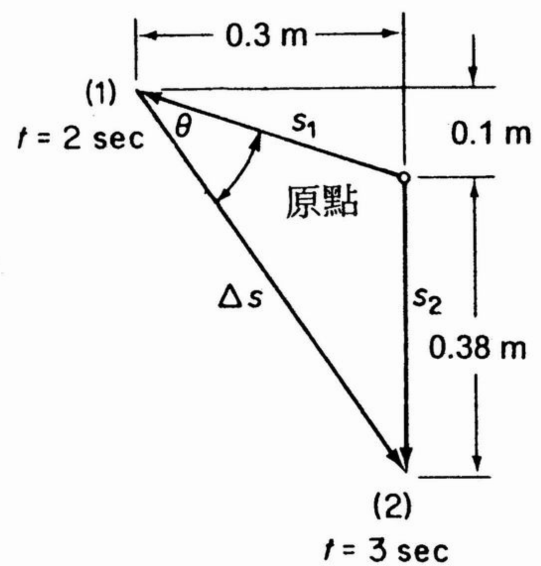
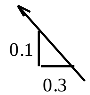


圖 10-5

解：

以位移 s_1 表由 $t=0$ 到 $t=2$ 之位置改變，則

$$s_1 = 0.316\ \text{m}$$



位移 s_2 表由 $t=0$ 到 $t=3$ 之位置改變，則

$$s_2 = 0.38\ \text{m}\downarrow$$

由點（1）到點（2）之位移改變為

$$\Delta s = s_2 - s_1$$
$$= s_2 + (-s_1)$$

因 s_2 及 s_1 為向量，由圖 10-6 之向量三角形。

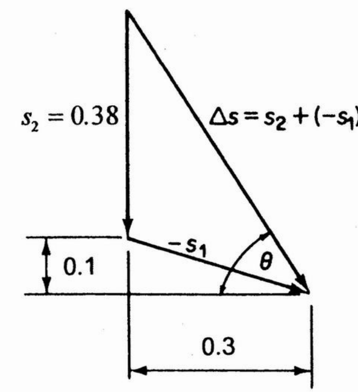


圖 10-6

$$\Delta s = \sqrt{0.3^2 + 0.48^2}$$
$$= 0.566\ \text{m}$$

利用式（10-1）

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0.566}{3-2}$$
$$v = 0.566\ \text{m/s}\ \overline{\ 58^\circ}$$

因

$$\tan\theta = \frac{0.48}{0.3} = 1.6$$
$$\theta = 58^\circ$$

（ 上式所得值為平均速度 ）

10-4　加速度

加速度 (acceleration) 為速度對時間的變化率。

速度包含大小及方向。只要其中之一改變，則有加速度產生。上述兩種情形皆可以下面公式表示

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{10-2}$$

式中

$a =$ 加速度（平均）

$\Delta v =$ 速度改變量

$= v_2 - v_1$

$\Delta t =$ 速度變化時之時間變化量

$= t_2 - t_1$

例題 10-3

圖 10-7 中車子由點（1）之靜止位置開始移動，往東加速 6 秒達點（2）之速率為 40 km/h。若維持相同速率 40 km/h，往南偏西 30°，在 $t = 10$ 秒時達點（3）位置。試決定由點（1）到點（2）及由點（2）到點（3）之加速度。

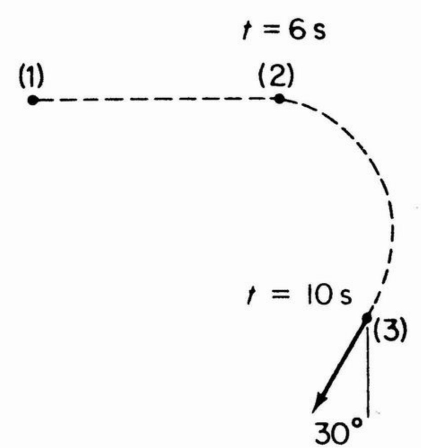


圖 10-7

解:

第一步驟先作單位轉換，將 km/h 轉換為 m/s

$$40\ \mathrm{km/h} = \frac{40 \times 1000}{60 \times 60} = 11.1\ \mathrm{m/s}$$

點（1）到點（2）之加速度可由式（10-2）

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$= \frac{11.1 - 0}{6 - 0}$$

$$\underline{a = 1.85\ \mathrm{m/s^2} \rightarrow}$$

點（2）到點（3）之加速度為

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2}$$

為求 $v_3 - v_2$ 向量，將負 v_2 加到 v_3 即 $v_3 + (-v_2)$，如圖 10-8。

由正弦定律

$$\frac{\Delta v}{\sin 120^\circ} = \frac{11.1}{\sin 30^\circ}$$

$$\Delta v = \frac{11.1 \times 0.866}{0.5}$$

$$\Delta v = 19.2\ \text{m/s} \quad \overline{30^\circ}$$

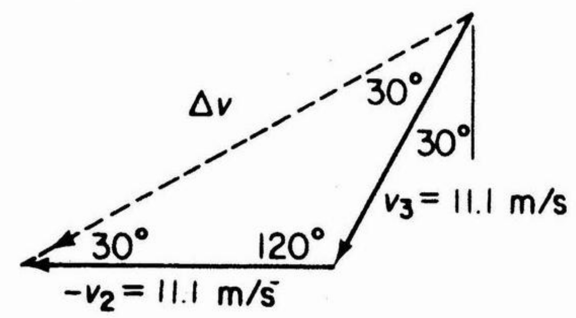


圖 10-8

將 Δv 值代入加速度方程式

$$a = \frac{v_3 - v_2}{t_3 - t_2} = \frac{19.2}{10.6}$$

$$\underline{a = 4.8\ \text{m/s}^2} \quad \overline{30^\circ}$$

加速度向量之方向與速度變化方向相同，上述所得加速度為平均加速度，而點（2）到點（3）間的瞬間加速度則隨時在改變方向。

10-5　等加速度直線運動

自由落體即為一例，因重力加速度 g 可假設為常數，當位於海平面時，$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}\,(32.2\,\mathrm{ft/sec^2})$ 。

位移、速度、加速度及時間彼此關係可以下面三個方程式表示

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad (10\text{-}3)$$

$$v = v_0 + a t \qquad (10\text{-}4)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 a s \qquad (10\text{-}5)$$

上述單位

$s =$ 位移，m 或 ft

$v_0 =$ 初速，m/s 或 ft/sec

$v =$ 末速，m/s 或 ft/sec

$a =$ 等加速度，$\mathrm{m/s^2}$ 或 $\mathrm{ft/sec^2}$

$t =$ 時間，秒

例題 10-4

若物體由建築物頂端落下經 7 秒到達地面，試求建築物高度及撞擊地面時的速度。

解:

將所給數據如下列出以便方程式所須。

$$t = 7s$$

$$a = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$$

$$s = ?$$

$$v =$$

$$v_0 = 0$$

由式（10-3）

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 0 + \frac{1}{2} \times 9.81 \times (7)^2$$

$$\underline{s = 240\ \mathrm{m}}$$

由式（10-4）

$$v = v_0 + at$$

$$= 0 + 9.81 \times 7 \underline{v = 68.7\mathrm{m/s} \downarrow}$$

例題 10-5

直昇機以垂直等加速度 $1\,m/s^2$ 上升到高度 300 m 處，當繼續往上到 350 m 時垂直速度減為零。此時再以水平加速度 $4\,m/s^2$ 加速到速度為 $15\,m/s$，試決定此過程所須時間。

解:

在此將每一飛行過程繪於圖 10-9，並將數據標於圖上。

過程 (1) 到 (2)：

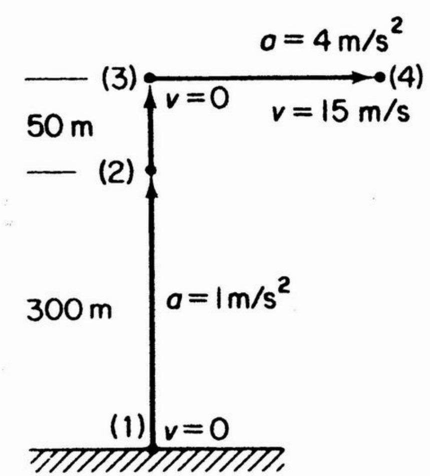


圖 10-9

$$s = 300\ \text{m}$$
$$v_0 = 0$$
$$a = 1\ \text{m/s}^2$$
$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$300 = 0 + \frac{1}{2} \times 1 \times t^2$$
$$t = 24.5\ \text{s}$$

若在（2）處速度為 v_2

$$v = v_0 + at$$
$$v_2 = 0 + 1 \times 24.5$$
$$v_2 = 24.5\ \text{m/s} \uparrow$$

過程（2）到（3）

$$v_0 = 24.5\ \text{m/s} \uparrow$$
$$s = 50\ \text{m}$$
$$v = 0$$
$$v_3^2 = v_0^2 + 2as$$
$$0 = (24.5)^2 + 2 \times a \times 50$$
$$a = -6\ \text{m/s}^2 \uparrow$$

（負號表減速方向為箭頭所指方向）

$$v = v_0 + at$$
$$0 = 24.5 - 6 \times t$$
$$\underline{t = 4.08\ \mathrm{s}}$$

過程（3）到（4）

$$v_0 = 0$$
$$v = 15\ \mathrm{m/s} \rightarrow$$
$$a = 4\ \mathrm{m/s^2} \rightarrow$$
$$v = v_0 + at$$
$$15 = 0 + 4\,t$$
$$\underline{t = 3.75\ \mathrm{s}}$$

$$\text{總共時間} = 24.5 + 4.08 + 3.75$$
$$\underline{= 32.3\ \mathrm{s}}$$

10-6　拋射運動

- 拋射運動（projectile motion）同時包含兩個直線運動，即垂直運動及水平運動。每一種運動，皆可以位移、速度、加速度向量表示。

- 在此假設空氣阻力為零，影響拋射運動的因素為初速、拋射方向及重力。加速度在水平方向為零，在垂直方向為 $9.81\,\mathrm{m/s^2}\,(32.2\,\mathrm{ft/sec^2})$。位移、速度、加速度的方向如前面所述的符號規則，即初速度方向假設為正。

例題 10-7

一拋射體以初速 30 m/s 與水平夾角 20° 發射，若 2.12 秒後落在同樣水平高度，試求水平飛行距離。

解:

由圖 10-11，速度之水平分量為

$$v_x = v\cos\theta = 30\cos 20^\circ$$
$$v_x = 28.2\ \mathrm{m/s}$$

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 28.2 \times 2.12 + 0$$
$$s = 59.8\ \mathrm{m}$$

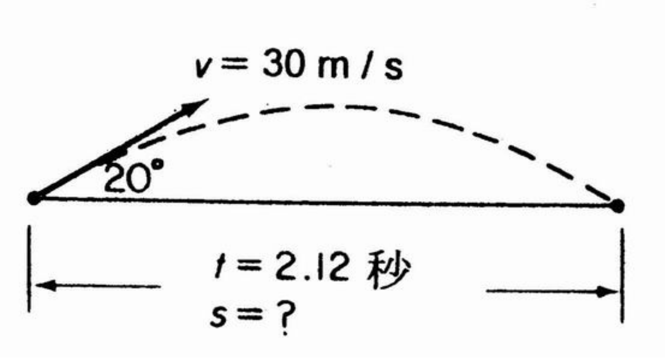


圖 10-11

例題 10-8

一拋射體以初速 250 m/s 與水平夾角 40° 發射，若降落在距離水平垂直面下 100 m 處，試求 (a) 飛行時間；(b) 水平位移；(c) 降落時末速。圖 10-12 上有上述資料說 明。

解：

(a) 由 A 及 B 間的垂直位移

$$v_0 = v\sin\theta = 250\sin 40^\circ$$
$$v_0 = 161\,\text{m/s}\uparrow$$
$$s = -100\,\text{m}$$
$$a = -9.81\,\text{m/s}^2$$
$$t = ?$$

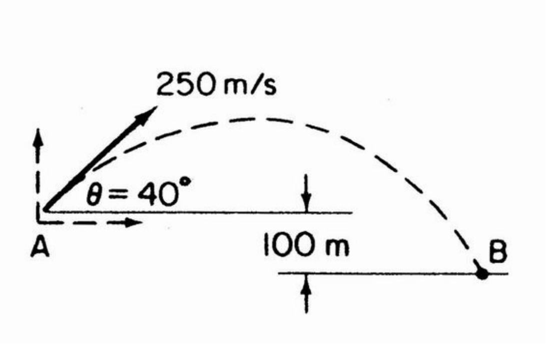


圖 10-12

利用式 (10-3)

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$-100 = 161t + \frac{1}{2}\times(-9.81)t^2$$
$$4.9t^2 - 161t - 100 = 0$$

解二次方程式

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{161\pm\sqrt{(161)^{2}-4\times4.9\times(-100)}}{2\times4.9}=\frac{161\pm167}{9.8}$$

$$t=33.4(\quad -0.61)$$

所以拋射體共飛行 33.4 s。

(b) 由 A 及 B 間的水平位移

$$v_{0}=v\cos\theta=250\cos40^{\circ}$$

$$v_{0}=192\ \mathrm{m/s}\quad\rightarrow$$

$$t=33.4\ \mathrm{s}$$

$$a=0$$

$$s=?$$

利用式 (10-3)

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 192 \times 33.4 + 0$$
$$s = 6412.8\text{m}$$

A 及 B 間水平位移為 6412.8 m。

(c) B 點末速為水平及垂直速度之合向量。水平速度為 $v_x = 192\ \text{m/s}$ 不變，在 A 及 B 間垂直方向

$$v_0 = 161\ \text{m/s}\uparrow$$
$$v = v_y$$
$$a = -9.81\ \text{m/s}^2$$
$$t = 33.4\ \text{s}$$
$$v = v_0 + at$$
$$v_y = 161 - 9.81 \times 33.4$$
$$= -167\ \text{m/s}\uparrow$$
$$v_y = 167\ \text{m/s}\downarrow$$

以向量形式將 v_x 及 v_y 相加

$$\underline{v = 254\ \text{m/s}\ \overline{\ \ {}^{41^\circ}}}$$

（ 另解 ）

為了避免利用二次方程式，在例題 10-8 中我們可將拋射運動分為二部分 AC 及 CB 段來考慮，如圖 10-13。點 C 為軌跡的頂點，此時垂直速度為零。

A 及 C 間的垂直方向

$$v_0 = 161\,\mathrm{m/s}\uparrow$$
$$v = 0$$
$$a = -9.81\,\mathrm{m/s^2}$$
$$t = ?$$
$$v = v_0 + at$$
$$0 = 161 - 9.81t$$
$$\underline{t = 16.4\,s}$$

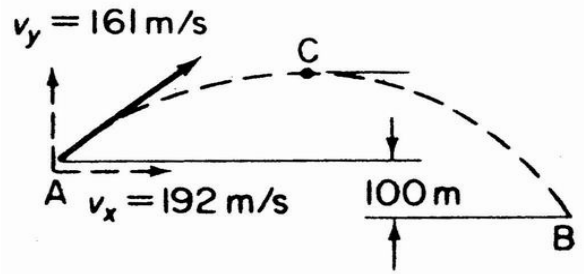


圖 10-13

現求 C 點距 A 點之垂直距離

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$= 161 \times 16.4 + \frac{1}{2}(-9.81)(16.4)^2$$

$$s = 1321\,\mathrm{m}$$